Aula 16

Teorema (Função Inversa Complexa): Seja $f : D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no ponto $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \text{int} D_f$. Então, se $f'(z_0) \neq 0$ tem-se

- existe uma vizinhança aberta U_{z_0} de z_0 e uma vizinhança aberta V_{w_0} de $w_0 = f(z_0)$ tal que $f : U_{z_0} \to V_{w_0}$ é uma bijecção
- a inversa $f^{-1} : V_{w_0} \to U_{z_0}$ é diferenciável (no sentido complexo) em $w_0 = f(z_0)$
- a derivada da inversa f^{-1} em $w_0 = f(z_0)$ é dada pelo (número) inverso de $f'(z_0)$

$$(f^{-1})'(w_0) = (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Proposição: Qualquer ramo do logoritmo complexo $\log_{\mathbb{C}} z = \log_{\mathbb{R}} |z| + i\, \text{Arg} z$, com $\text{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ é diferenciável complexo em $z \neq 0$ e $\text{Arg} z \neq \theta_0$ com

$$\log' z = \frac{1}{z}.$$

Equações de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares

$$\begin{array}{ccc}]0,\infty[\times]\theta_0,\theta_0+2\pi[& \mapsto & \mathbb{C} \\ (r,\theta) & \mapsto & x+iy = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta \end{array}$$

Proposição: Fazendo $\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ e $\tilde{v}(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares são

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \end{cases}$$

sendo a derivada dada por

$$\begin{aligned} f'(z_0 = r_0e^{i\theta_0}) &= e^{-i\theta_0}\frac{\partial f}{\partial r}(r_0e^{i\theta_0}) = \frac{e^{-i\theta_0}}{ir_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0e^{i\theta_0}) \\ &= e^{-i\theta_0}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r_0e^{i\theta_0}) + i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}(r_0e^{i\theta_0})\right) \\ &= \frac{e^{-i\theta_0}}{r_0}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}(r_0e^{i\theta_0}) - i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r_0e^{i\theta_0})\right) \end{aligned}$$

Proposição: Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa no ponto $z_0 = x_o + iy_0$, com $f'(z_0) \neq 0$. Então, as curvas de nível

$$u(x,y) = c_1 = \mathrm{Re}(f(z_0)) \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = c_2 = \mathrm{Im}(f(z_0))$$

que passam no ponto z_0, cruzam-se ortogonalmente nesse ponto.

Integração Complexa

Definição: Um **caminho** ou **parametrização duma curva** em $\mathbb{C}$ é uma aplicação contínua $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

- Diz-se que é um **caminho fechado** se as imagens dos pontos inicial e final são as mesmas, ou seja, se $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.
- Diz-se que é um **caminho simples** se γ é injectiva (ou seja, que as suas imagens não se auto-intersectam), exceptuando possivelmente apenas os extremos, no caso de ser fechado.
- Diz-se que é um **caminho regular** se $\gamma \in C^1[t_0, t_1]$. E diz-se que é um **caminho seccionalmente regular** se é possível encontrar uma partição finita $t_0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = t_1$ tal que $\gamma \in C^1[s_j, s_{j+1}]$ para todo o $j = 0, \ldots, n-1$.

Chama-se **curva** em $\mathbb{C}$ ao contradomíno dum caminho $\gamma([t_0, t_1])$. Uma curva diz-se fechada, simples ou regular, se existem caminhos com essas propriedades que a parametrizam. Uma curva simples e fechada designa-se por **curva de Jordan**.

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre os pontos duma curva $C \subset D_f$ a qual é parametrizada por um caminho seccionalmente regular $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, com $C = \gamma([t_0, t_1])$. Então, define-se o **integral de f ao longo de γ**, e representa-se por $\int_\gamma f(z)dz$, ou mais simplesmente $\int_\gamma f$, como

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$